

## Como sintonizar un control PID, teoría y práctica. Nota técnica 11

ARIAN S.A.  
Octubre 2003

Introducción .....	2
Historia .....	2
Objetivos .....	2
1.0 Modelos de sistemas .....	3
1.1 Horno.....	4
1.2 Circuito RC .....	7
1.3 Nivel de líquido en un tanque .....	9
1.4 Estimación de los parámetros del sistema. ....	11
2.0 Control PID .....	13
2.1 Detalles de funcionamiento .....	13
2.2 Diferentes formatos .....	15
3.0 Sintonización del PID.....	18
3.1 Respuesta al escalón (Lazo abierto). ....	19
3.1.1 Fórmulas de Ziegler-Nichols para “respuesta al escalón”.....	22
3.1.2 Fórmulas de Astron y Hagglund para “respuesta al escalón” .....	23
3.2 Método de respuesta en frecuencia (lazo cerrado) .....	26
3.2.1 Fórmulas de Ziegler-Nichols para “respuesta en frecuencia” .....	28
3.2.2 Fórmulas de Astron y Hagglund para “respuesta en frecuencia”.....	29

# Introducción

## Historia

En 1942, John G. Ziegler y Nathaniel B. Nichols idearon el método de sintonización de lazo-cerrado de su mismo nombre. En aquella época, el control de lazos era, en el mejor de los casos, "ensayo y error".

El dispositivo que Ziegler fabricó para desarrollar su método incluyó el primer regulador neumático con acción integral y derivativa agregada al control proporcional en un mismo dispositivo.

Desde entonces se han usado los reguladores neumáticos. Sobre 35 fabricantes hacen y venden reguladores neumáticos. Un fabricante prominente de reguladores dice que casi 40% de las ventas de controladores del año pasado, (1997) eran modelos neumáticos.

En 1951, los hermanos Swarthout llevaron el control de lazo cerrado a su siguiente etapa cuando introdujeron el primer controlador electrónico de lazo cerrado. El resto como dicen ellos, es historia.

(tomado de la revista Control Engineering, Mayo 1998)

## Objetivos

El objetivo es entregar una idea intuitiva de los tiempos y ganancias características de un sistema lineal de primer orden.

Entregar toda la información que hace falta para vincular el lenguaje formal de teoría de control moderno con el lenguaje usado en los controladores de procesos usados en terreno.

Presentar métodos prácticos para encontrar los parámetros óptimos de un controlador PID.

Para ello en este documento se estudiarán 3 modelos representativos de sistemas.

Luego las ecuaciones y detalles internos de un PID (electrónico y con cpu por supuesto)

Finalmente se presentan los métodos de sintonización de Ziegler-Nichols y los desarrollados por Astron y Hagglund (1994) para sintonizar controles PID.

## 1.0 Modelos de sistemas

El objetivo es ver la semejanza entre 3 sistemas dinámicos distintos que se pueden representar con la misma **función de transferencia**  $G(s)$

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K_p e^{-s \cdot L}}{1 + Ts}$$

Donde, siguiendo la notación común a todos los libros de texto

$y(s)$  transformada de Laplace de la **salida** del sistema  
(por Ej. temperatura, nivel, etc)

$u(s)$  transformada de Laplace de la **entrada** del sistema  
(por Ej. potencia de los calefactores)

Si no se domina mucho la transformada de Laplace, no importa, lo importante es que existen en este modelo 3 parámetros que caracterizan en forma aproximada un sistema lineal de primer orden. Estos son

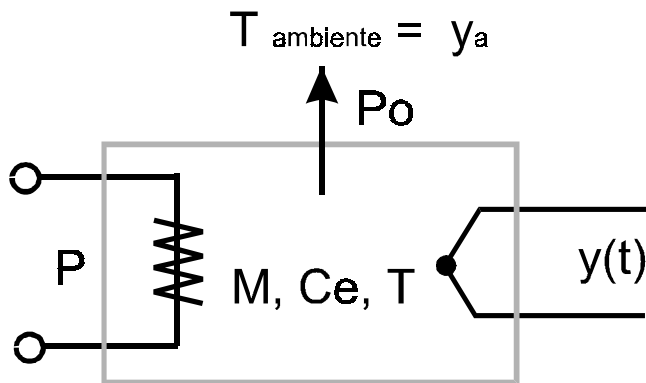
$K_p$  **ganancia estática** (static gain) Es la ganancia o amplificación del sistema para una entrada constante (ganancia DC)

$L$  **tiempo muerto** (dead time) Es el tiempo que transcurre desde que se provoca un cambio en la entrada hasta que aparece algún cambio en la salida.

$T$  **tiempo característico** (characteristic time) Como su nombre lo dice, es un tiempo característico del sistema de primer orden.  
Se puede pensar como el tiempo que toma a la salida cambiar un 63% de su cambio total, cuando se aplica un cambio en la entrada .  
Como se vera este corresponde a la constante RC de un filtro pasa bajo o la inercia térmica de un horno.

## 1.1 Horno

Supongamos un sistema de control de temperatura en un horno o maquina.  
Sean:



$Y(t)$	Temperatura instantánea (grados Celsius)
$P(t)$	Potencia instantánea de los calefactores (Wats)
$P_o(t)$	Potencia perdida por disipación de calor al ambiente (Wats)
$M$	Masa del material en el horno (Kg)
$Ce$	Calor específico del material

La potencia perdida por disipación se puede aproximar linealmente por la formula

$$P_o(t) = K_1 \cdot (Y(t) - Y_a)$$

Donde

$Y_a$	Temperatura de ambiente exterior.
$K_1$	Constante de disipación de energía.

Luego por conservación de energía

$$M \cdot Ce \frac{dY}{dt}(t) = P(t) - P_o(t)$$

Sustituyendo  $P_o(t)$

$$P(t) = M \cdot Ce \cdot \frac{dY}{dt}(t) + K_1 \cdot Y(t) - K_1 \cdot Y_a$$

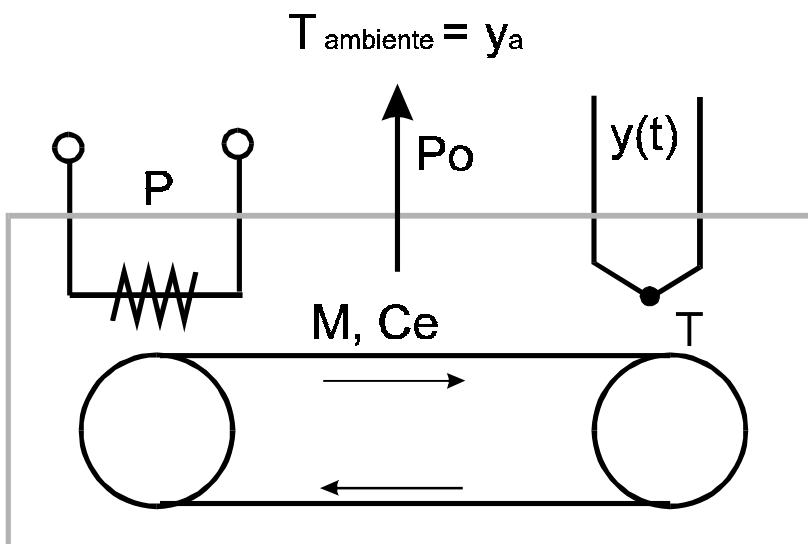
Sin perder generalidad podemos decir que el término  $K_1 Y_a = 0$ , (por Ej. por que modificamos nuestras unidades de temperatura)

Además supongamos que en el horno es un poco mas complicado en el sentido que hay un transporte de materia que toma  $L$  segundos desde el punto donde se aplica la potencia  $P(t)$  hasta donde se mide la temperatura  $Y(t)$ .

Esto podría deberse por ejemplo a que el sistema es tal que el calefactor calienta agua que se transporta por una tubería hasta un punto donde se ocupa para subir la temperatura de una autoclave.

Otro ejemplo puede ser una banda transportadora continua de material que lo calienta en un punto y lo traslada unos metros donde un sensor infrarrojo mide su temperatura en movimiento.

En ambos casos la potencia que debemos usar es la que se aplicó hace  $L$  segundos, es decir  $P(t - L)$



Luego la ecuación diferencial queda de la forma:

$$P(t - L) = M \cdot C_e \cdot \frac{dY}{dt}(t) + K_1 \cdot Y(t)$$

Tomando transformada de Laplace a ambos lados

$$P(s) \cdot e^{-sL} = (M \cdot C_e \cdot s + K_1) \cdot Y(s)$$

Se escribe ahora la función de transferencia del sistema

$$G(s) = \frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{K_p \cdot e^{-sL}}{1 + Ts}$$

Donde

$$K_p = \frac{1}{K_1} \quad \text{ganancia estática del sistema}$$

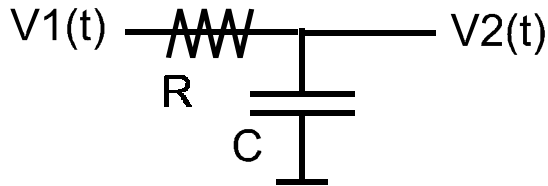
$$T = \frac{M \cdot Ce}{K_1} \quad \text{tiempo característico}$$

$L$  tiempo muerto

Observe que  $T$  es proporcional a la masa y calor específico del material

## 1.2 Circuito RC

Se tiene un circuito RC pasa bajo con voltaje de entrada  $V_1(t)$  y voltaje de salida  $V_2(t)$ .

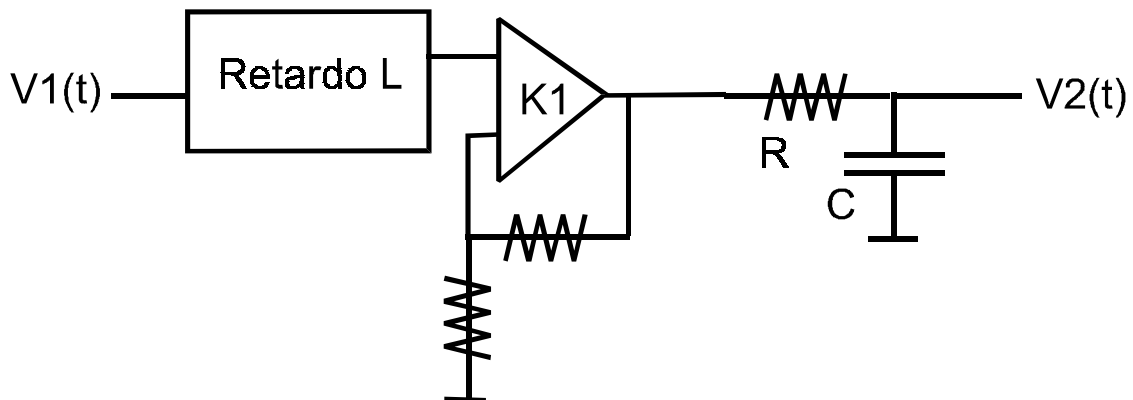


Recorriendo el circuito tenemos la ecuación diferencial

$$\frac{(V_1 - V_2)}{R} = I = C \cdot \frac{dV_2}{dt}$$

$$V_1(t) = R \cdot C \cdot \frac{dV_2}{dt} + V_2$$

Consideremos un circuito un poco mas complicado que incluye una línea de retardo de  $L$  segundos y un amplificador de ganancia  $K_1$



En este caso la ecuación diferencial será:

$$K_1 \cdot V_1(t - L) = R \cdot C \cdot \frac{dV_2}{dt} + V_2$$

Tomando transformada de Laplace y calculando la función de transferencia

$$K_1 \cdot V_1(s) \cdot e^{-LS} = (R \cdot C \cdot s + 1) \cdot V_2(s)$$

$$G(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{K_P \cdot e^{-LS}}{1 + Ts}$$

Donde

$$K_p = K_1$$

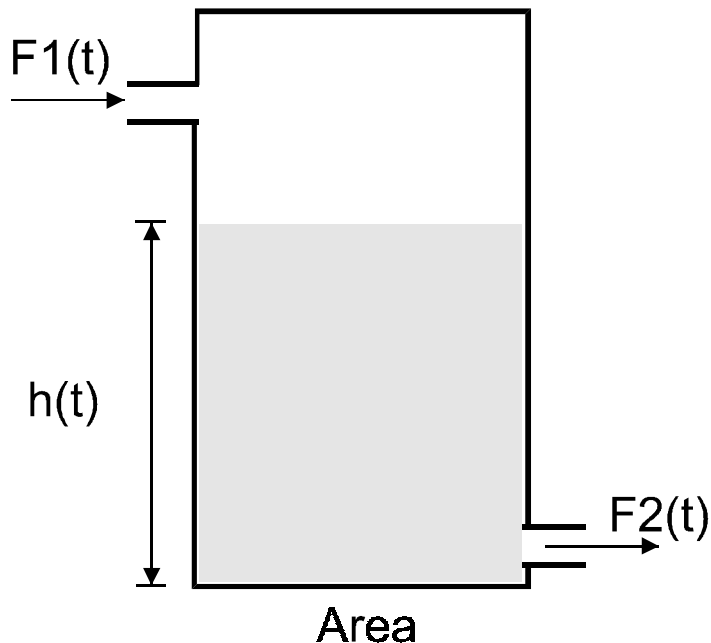
$$T = RC$$

En este caso el tiempo característico  $T = RC$  como era de esperar.



### 1.3 Nivel de líquido en un tanque

Se tiene un tanque el cual se llena continuamente con un fluido y a la vez se vacía por un agujero en el fondo del mismo.



Deseamos modelar el comportamiento de la altura o nivel  $h(t)$  del tanque según el flujo de entrada  $F_1(t)$

- $F_1(t)$  Caudal entrante en litros/segundo
- $F_2(t)$  Caudal de vaciado en litros/segundo
- $A$  Área transversal del tanque

Por conservación de materia

$$F_1(t) - F_2(t) = A \cdot \frac{dh(t)}{dt}$$

El flujo de vaciado  $F_2(t)$  se puede estimar considerando que es proporcional a la presión hidro-estática en el fondo del tanque provocado por la columna de fluido de altura  $h(t)$

$$F_2(t) = K_2 \cdot P(t)$$

$$P(t) = g \cdot D \cdot h(t)$$

- $P(t)$  Presión hidro-estática en el fondo del tanque
- $K_2$  Constante dependiente de la forma del agujero de vaciado

$g$  Aceleración de gravedad  
 $D$  Densidad del fluido

Luego

$$F_2(t) = K_2 \cdot g \cdot D \cdot h(t)$$

Entonces despejando  $F_1(t)$  y substituyendo  $F_2(t)$  tenemos

$$F_1(t) = F_2(t) + A \cdot \frac{dh(t)}{dt} = K_2 \cdot g \cdot D \cdot h(t) + A \cdot \frac{dh(t)}{dt}$$

Ahora suponiendo que el fluido de entrada  $F_1(t)$  se transporta en un canal abierto por ejemplo o si se trata de un material viscoso que se alimenta desde una banda transportadora, entonces podríamos introducir un tiempo muerto  $L$ .

$$F_1(t-L) = K_2 \cdot g \cdot D \cdot h(t) + A \cdot \frac{dh(t)}{dt}$$

Tomando transformada de Laplace y calculando la función de transferencia

$$F_1(s) \cdot e^{-Ls} = (K_2 \cdot g \cdot D + A \cdot s) \cdot h(s)$$

$$G(s) = \frac{h(s)}{F_1(s)} = \frac{K_p \cdot e^{-Ls}}{1 + Ts}$$

Donde

$$K_p = \frac{1}{K_2 \cdot g \cdot D}$$

$$T = \frac{A}{K_2 \cdot g \cdot D}$$

En este caso el tiempo característico es proporcional al área transversal del tanque.

## 1.4 Estimación de los parámetros del sistema.

Acabamos de ver que 3 sistemas distintos se pueden modelar aproximadamente con la función de transferencia

$$G(s) = \frac{K_p e^{-sL}}{1 - Ts}$$

Ahora veremos un experimento que permite estimar el valor de los 3 parámetros  $K_p$ ,  $L$ ,  $T$ . Estos los usaremos mas adelante para calcular los valores óptimos de las constantes que usaremos en nuestro controlador PID.

El método consiste en dejar en reposo el sistema hasta que este estable. Luego observando continuamente la salida  $y(t)$ , aplicar en la entrada un escalón unitario  $H(t)$  (función Heaviside) de potencia o cambio de 0% a 100%.

Analíticamente es posible resolver la ecuación diferencial que describe la evolución en tiempo de este experimento.

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K_p e^{-sL}}{1 - Ts}$$

Donde en este caso

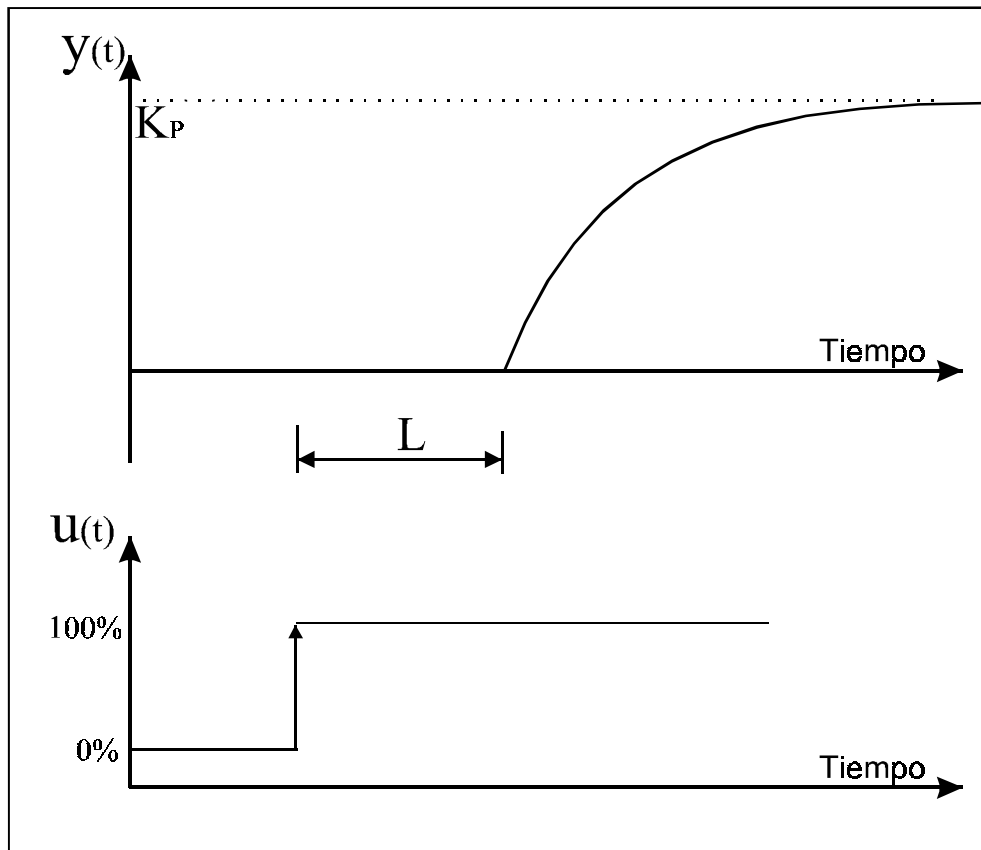
$$u(s) = 1/s, \text{ pues } u(t) = H(t), \text{ y}$$

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Luego la solución de  $y(t)$  es

$$y(t) = K_p \cdot (1 - e^{-(t-L)/T}) \cdot H(t - L)$$

Graficando esta solución vemos que el valor final de  $y(t)$  tiende a ser la ganancia estática  $K_p$ .



El tiempo muerto  $L$  se reconoce fácilmente en el eje horizontal como el tiempo  $t=0$  hasta que comienza a subir  $y(t)$ .

Finalmente para encontrar  $T$  podemos medir la máxima pendiente de la curva trazando una recta tangente al grafico, esta corresponde al máximo valor de la derivada de  $y(t)$ , el cual debería ocurrir para  $t=L$ .

$$m = \max \frac{dy(t)}{dt} = \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=L} = \frac{K_p}{T}$$

Como ya tenemos  $K_p$ , entonces  $T$  se obtiene despejando.

$$T = K_p / m$$

Con este experimento encontramos los 3 parámetros  $K_p$ ,  $L$ ,  $T$  que describen nuestro sistema

## 2.0 Control PID

### 2.1 Detalles de funcionamiento

Normalmente en los libros de texto aparece la ecuación del PID como:

$$U(t) = K \cdot \left( E(t) + \frac{1}{T_i} \int E dt + T_d \frac{dE}{dt} \right)$$

Donde:

$y(t)$	Variable de proceso medida, por Ej. temperatura
$y_{sp}$	Set point
$E(t) = y_{sp} - y(t)$	Error
$U(t)$	Salida de control (Ej. Potencia de calefacción)
$K$	Ganancia proporcional del control
$T_i$	Constante de integración
$T_d$	Constante derivativa

Pero esto es solo en los libros de texto porque en la practica la ecuación usada por los controladores de procesos industriales contiene una serie de detalles adicionales para poder operar en condiciones reales.

El primer detalle es que si se tiene una entrada  $y(t)$  con ruido , al tomar la derivada este se amplifica, especialmente en las componentes de alta frecuencia.

Para solucionar este problema se aplica un filtro pasa bajo al error antes de tomar su derivada,

El termino derivativo es ahora  $\frac{d \langle E(t) \rangle}{dt}$  en vez de  $\frac{dE(t)}{dt}$

donde,  $\langle E(t) \rangle$  es el error filtrado

El termino  $\int E dt$  tiene además una saturación es decir que no aumenta o disminuye indefinidamente.

$$-cte \leq \int E dt \leq cte$$

Esto se llama comúnmente función "anti windup" y es particularmente importante en la puesta en marcha de los sistemas para que no ocurra "over-shot"

<p>En un controlador, al cambiar una de las constantes <math>K, T_i</math>, se ajustara automáticamente el valor de <math>\int E dt</math> para que la salida <math>U(t)</math> no varíe abruptamente, generando así una perturbación innecesaria</p>
<p>De la misma forma la derivada del error <math>\frac{dE}{dt}</math> no se toma en realidad sobre <math>E(t)</math>, si no mas bien se obtiene de <math>-y(t)</math>.  Esto es para poder cambiar el set point desde el teclado sin que el control lo interprete como un cambio en la entrada <math>y(t)</math>.</p> $\frac{dE(t)}{dt} = \frac{d(y_{sp} - y(t))}{dt} = -\frac{dy(t)}{dt}$
<p>Además la misma entrada <math>y(t)</math> debe ser filtrada en caso de que sea muy ruidosa.</p>

Cada fabricante de controles PID resuelve los detalles anteriores de distinta forma, la que no es descrita en los manuales de usuario por ser “secreto comercial” y que influye directamente en el rendimiento del controlador. Algunas veces de los algoritmos o módulos de PID insertos dentro de un PLC no funcionan muy bien, pues no incorporan todas estas funciones.

## 2.2 Diferentes formatos

Además de los detalles recién mencionados, cada fabricante modifica la ecuación del PID según lo crea más conveniente. De esta forma las constantes que son programadas en cada instrumento difieren en sus unidades (minutos o segundos) y en la forma en que aparecen en el cálculo de la variable de control  $U(t)$ .

A continuación se presentan algunos ejemplos de las distintas formulas usadas por distintos fabricantes.

En todos los casos la variable  $U(t)$  toma valores de 0% a 100%

Nuestros controles (Arian) usan la siguiente fórmula

$$U(t) = 100\% \cdot K \cdot \left( E(t) + \frac{[I]}{10^4} \int E dt + [D] \frac{dE}{dt} \right)$$

$$K = \frac{1}{[y_{sp}] \cdot \frac{[P]}{100\%}} \quad \text{ganancia proporcional}$$

Los siguientes valores se introducen desde el teclado

[P]	Banda proporcional .5%... 300%
[I]	Cte de integración 0...800/10000 1/seg
[D]	Cte derivativa 0...500 seg
[y <sub>sp</sub> ]	Set point

Honeywel UDC2000

$$U(t) = 100\% \cdot K \cdot \left( E(t) + 60 \cdot [IRPM] \cdot \int E dt + \frac{[RATET]}{60} \cdot \frac{dE}{dt} \right)$$

$$K = \frac{1}{[y_{sp}] \cdot \frac{[P]}{100\%}} \quad \text{ganancia proporcional}$$

[P]	Banda proporcional en %
[IRPM]	Cte de integración en "repeticiones"/minuto
[RATET]	Cte derivativa en minutos

Esta fórmula es similar a la nuestra pero usa minutos en vez de segundos.

Eurotherm 808 y 94

$$U(t) = 100\% \cdot K \cdot \left( E(t) + \frac{1}{[I]} \cdot \int E dt + [D] \cdot \frac{dE}{dt} \right)$$

$$K = \frac{1}{[y_{sp}] \cdot \frac{[P]}{100\%}} \quad \text{ganancia proporcional}$$

[P] Banda proporcional en %

[I] Cte de integración en segundos

[D] Cte derivativa en segundos

Nótese que la cte de integración aparece dividiendo, luego la acción integral disminuye al aumentar [I].

Antiguamente los controles neumáticos usaban la forma "Interactuante" del control PID, por lo cual algunos fabricantes la siguen usando en controles electrónicos

$$U(t) = K \cdot \left( E(t) + K_d \frac{dE}{dt} \right) + \frac{1}{T_i} \int (E(t) + K_d \frac{dE}{dt}) dt$$

Observe que en los 3 primeros ejemplos se tiene la misma forma de introducir la ganancia proporcional usando la banda proporcional [P] y el set point [y<sub>sp</sub>]

$$K = \frac{1}{[y_{sp}] \cdot \frac{[P]}{100\%}}$$

El motivo es que esta forma es mas intuitiva. Suponga que el instrumento se programa con:

$$[P] = 10\%$$

$$[y_{sp}] = 200 \text{ grados}$$

Si tenemos solo un control proporcional (los términos integral y derivativo son ambos 0) entonces la salida será

$$U(t) = 100\% \text{ cuando la temperatura } y(t) \text{ sea } 180 \text{ grados}$$



$U(t) = 50\%$  cuando la temperatura  $y(t)$  sea 190 grados

$U(t) = 0\%$  cuando la temperatura  $y(t)$  sea 200 grados

Es decir la salida de control varia de su mínimo a su máximo en una banda de 20 grados (10% de 200) debajo del set point.

Por otra parte muchos fabricantes especifican la cte de integración en “repeticiones/minuto” o “tiempo/repeticiones”, cuando usan una formula de PID tal que la ganancia proporcional multiplica al error , al termino integral y al derivativo.

Lo único importante es saber que si el fabricante especifica “repeticiones” para el termino integral , entonces la formula usada es del tipo de las 3 primeras presentadas de ejemplo.

$$U(t) = 100\% \cdot K \cdot \left( E(t) + cte \cdot \int E dt + [D] \cdot \frac{dE}{dt} \right)$$

Por todo lo descrito es evidente que al reemplazar un control de un fabricante por otro modelo distinto no se pueden usar las mismas constates P, I, D.

En rigor para hallar las formulas que relacionan las constantes entre los 2 fabricantes se debería averiguar las formulas que ambos usan y igualar los coeficientes que multiplican a los términos  $E(t)$ ,  $\frac{dE}{dt}$  y  $\int E dt$

Por ejemplo de las formulas se ve claramente que en los 3 primeros ejemplos la constante [P] es la misma para los 3 fabricantes, en tanto que el derivativo [D] coincide para Arian y Eurotherm pero el integral [I] es distinto para todos ellos.

Finalmente tampoco resultara óptimo pasar las constantes de un fabricante a otro por formulas pues las diferencias de funcionamiento internas descritas en la sección 2.1 harían que las constantes calculadas para el nuevo control no sean las mejores, a pesar de que para el antiguo pudieran serlo.

Lo mejor es sintonizar manualmente el control nuevo como se describe a continuación.

### 3.0 Sintonización del PID

En esta sección presentaremos las formas de obtener los valores óptimos de las constantes [P],[I],[D], de un controlador en base a los parámetros encontrados por experimentos hechos en el sistema.

Existen fundamentalmente 2 tipos de experimentos para reconocer un sistema, estos son de lazo abierto o respuesta al escalón y los de respuesta en frecuencia o lazo cerrado.

Los experimentos deberán hacerse siempre midiendo el tiempo en segundos.

Para los 2 tipos de experimento se presentaran las fórmulas clásicas de Ziegler-Nichols y las más recientes (1994) desarrolladas por Astron y Hagglund.

Estas formulas entregan los valores óptimos  $K, T_i, T_d$  para la ecuación PID “de libro”

$$U(t) = K \cdot \left( E(t) + \frac{1}{T_i} \int E dt + T_d \frac{dE}{dt} \right)$$

Los que podrán usarse en cualquier controlador PID sin importar el fabricante, pero cuidando de convertirlas al formato de unidades apropiado.

Por ejemplo en el caso particular en un controlador Arian, para usar los 3 números obtenidos  $K, T_i, T_d$ , deben convertirse con las formulas:

$$[P] = \frac{100\%}{[SP] \cdot K}$$

$$[I] = \frac{10^4}{T_i}$$

$$[D] = T_d$$

Donde [SP] es el set point y [P],[I],[D] son los valores a ser introducidos por el teclado.

Para otros fabricantes habrá que identificar la formula del control PID que usan e igualar coeficientes para encontrar la relación. (ver sección 2.2)

### 3.1 Respuesta al escalón (Lazo abierto).

En la sección 1.4 desarrollamos un experimento para reconocer los parámetros del modelo de sistema de primer orden con tiempo muerto. En la práctica tendremos que modificar ligeramente este experimento para poder obtener resultados. Esto se debe a que nuestro modelo es una aproximación lineal y entonces habrán diferencias con el sistema real, por ej. el máximo valor de la derivada no estará exactamente en  $t = L$ . Además no es recomendable (o ni siquiera posible) aplicar el 100% de potencia en forma continua y esperar a ver que pasa.

El experimento recomendado ahora es el siguiente:

Deseamos por ejemplo controlar la temperatura de un horno a 150 grados. Usando un controlador conectado al sistema en modo manual (lazo abierto) se le programa una salida constante  $u_1$  de un valor similar al que tendría en operación normal del sistema (por Ej. 55%). Luego se debe esperar a que el sistema se estabilice y la salida  $y(t)$  llegue a su valor estacionario  $y(t) = y_1$  (por Ej. 120 grados)

Entonces aplicaremos nuestro escalón subiendo la potencia a otro valor razonable  $u_2$  como para observar un cambio en la salida (por Ej. 75%). Hecho esto la salida subirá hasta estabilizarse en un valor final  $y(t) = y_2$  (por Ej. 190 grados).

En este caso  $K_p$  lo obtendremos de la formula siguiente

$$K_p = \frac{y_2 - y_1}{u_2 - u_1} \quad \text{por Ej.} = (190 - 120) / (0.75 - 0.55) = 350$$

Ahora debemos determinar el punto de la curva donde la tangente tiene su máxima pendiente. Definido ese punto, tenemos los números  $y_m$ ,  $t_m$  entonces la pendiente buscada se obtiene calculando:

$$m = \frac{y_m}{t_m}$$

Con este valor y sabiendo que  $m = \max \frac{dy(t)}{dt} = \frac{K_p}{T}$  calculamos

$$T = \frac{K_p}{m}$$

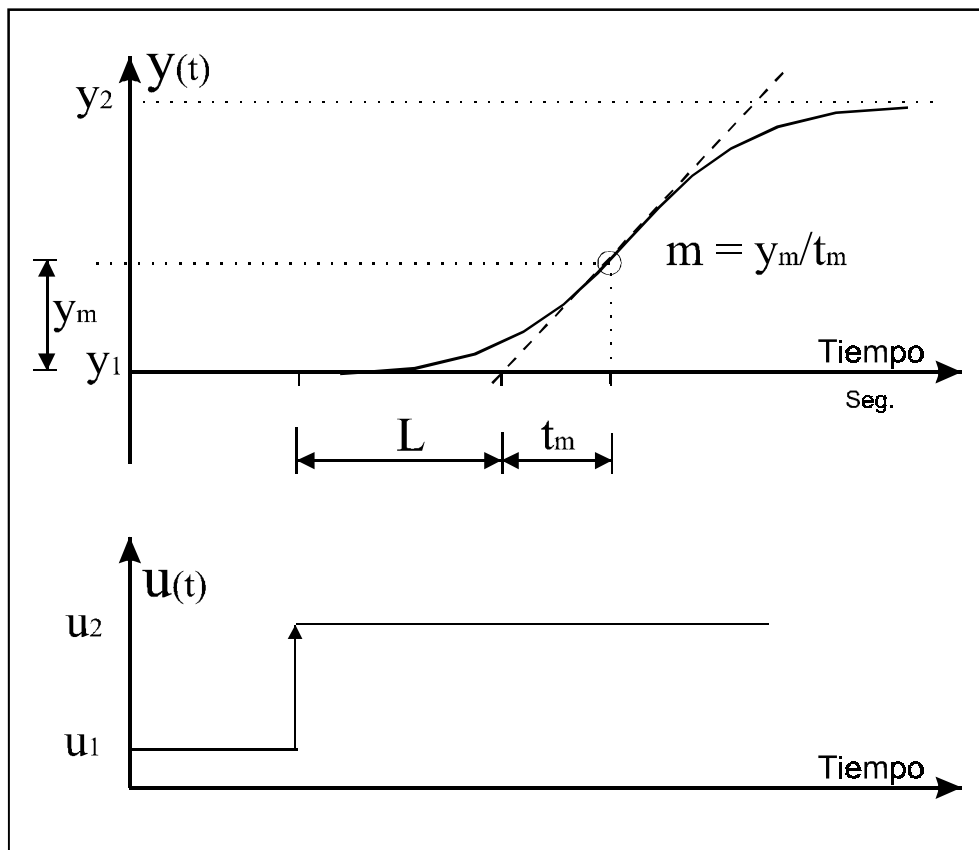
En tanto que  $L$  lo estimaremos con la intersección de la recta tangente a el eje horizontal.

Resumiendo, del grafico medimos y calculamos:

$L$  Se obtiene directo del grafico.

$K_p = \frac{y_2 - y_1}{u_2 - u_1}$  Con los valores  $u_2, u_1$  y los medidos  $y_2, y_1$

$m = \frac{y_m}{t_m}$  Máxima pendiente de la tangente



De estos valores obtenemos además

$T = K_p / m$  Tiempo característico

## Ejemplo

Por ejemplo, si hacemos el experimento y obtenemos los siguientes resultados:

$$K_p = \frac{y_2 - y_1}{u_2 - u_1} = (190 - 120) / (0.75 - 0.55) = 350$$

Al hacer el gráfico se observa que el punto de máxima pendiente se encuentra cuando la temperatura es 140 grados, luego al trazar la recta tangente en ese punto se obtiene:

$$y_m = \Delta y = 140 - 120 = 20 \text{ grados}$$

$$t_m = 25.7 \text{ segundos}$$

$$L = 30 \text{ segundos}$$

Entonces

$$m = \frac{y_m}{t_m} = 20/25.7 = 0.778 \quad \text{Máxima pendiente de la tangente}$$

$$T = K_p / m = 350/0.778 = 449.87 \sim 450 \text{ segundos}$$

En total para este ejemplo usaremos los siguientes valores:

$$K_p = 350$$

$$L = 30 \text{ segundos}$$

$$m = 0.778$$

$$T = 450 \text{ segundos}$$

### 3.1.1 Fórmulas de Ziegler-Nichols para “respuesta al escalón”

Para aplicar Ziegler-Nichols solo requerimos usar  $L$  y  $m$ , no hace falta saber  $K_p$ , lo que es una ventaja si no queremos esperar a que el sistema llegue a su valor final una vez aplicado el escalón en la entrada.

Calculando previamente:

$$a = m \cdot L$$

Ziegler-Nichols Método de respuesta al escalón			
Control	$K$	$T_i$	$T_d$
P	$\frac{1}{a}$		
PI	$\frac{0.9}{a}$	$3 \cdot L$	
PID	$\frac{1.2}{a}$	$2 \cdot L$	$\frac{L}{2}$

#### Ejemplo

Por ejemplo para un control PID con los valores de la sección 3.0

$$K_p = 350 \text{ (no se usa en este caso)}$$

$$L = 30 \text{ segundos}$$

$$m = 0.778$$

$$T = 450 \text{ segundos (no se usa en este caso)}$$

Calculamos

$$a = m \cdot L = 0.778 \cdot 30 = 23.34$$

$$K = 1.2/a = 1.2 / 23.34 = 0.0514138$$

$$T_i = 2L = 2 \cdot 30 = 60 \text{ seg}$$

$$T_d = L/2 = 30/2 = 15 \text{ seg}$$

Si ahora en particular estamos usando un controlador Arian, con set point =150 grados, las constantes a ser programadas serian:

$$[SP] = 150 \text{ grados}$$

$$[P] = \frac{100\%}{[SP] \cdot K} = 100\% / (150 \cdot 0.0514138) = 12.96\% \sim 15\%$$

$$[I] = \frac{10^4}{T_i} = 10000 / 60 \text{seg} = 166 \text{ seg}^{-1} \sim 150$$

$$[D] = T_d = 15 \text{ seg.} \sim 10$$

### 3.1.2 Fórmulas de Astron y Hagglund para “respuesta al escalón”

Por otra parte Astron y Hagglund después de hacer extensas simulaciones numéricas en un computador recomiendan usar las siguientes formulas que requieren tener los 3 parámetros  $K_p, L, T$ .

En la práctica realizamos el experimento descrito en la sección 3.1 y obtenemos los números  $K_p, L, m$ . Con ellos calculamos:

$$T = K_p / m$$

$$a = m \cdot L$$

$$\tau = \frac{L}{L+T} \quad \text{llamado “tiempo muerto normalizado”}$$

Con estos números y la siguiente tabla podemos evaluar la formula:

$$f(\tau) = a_0 \exp(a_1 \cdot \tau + a_2 \cdot \tau^2)$$

La que entrega  $aK, T_i/L, T_i/T, T_d/L, T_d/T$  con los que finalmente calculamos  $K, T_i, T_d$  para un control PID

Astron-Hagglund Método de respuesta al escalón Control PID						
	$M_s = 1.4$			$M_s = 2.0$		
	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_0$	$a_1$	$a_2$
$aK$	3.8	-8.4	7.3	8.4	-9.6	9.8
$T_i/L$	5.2	-2.5	-1.4	3.2	-1.5	-0.93
$T_i/T$	0.46	2.8	-2.1	0.28	3.8	-1.6
$T_d/L$	0.89	-0.37	-4.1	0.86	-1.9	-0.44
$T_d/T$	0.077	5.0	-4.8	0.076	-3.4	-1.1

Astron-Hagglund Método de respuesta al escalón Control PI						
	$M_s = 1.4$			$M_s = 2.0$		
	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_0$	$a_1$	$a_2$
$aK$	0.29	-2.7	3.7	0.78	-4.1	5.7
$T_i/L$	8.9	-6.6	3.0	8.9	-6.6	3.0
$T_i/T$	0.79	-1.4	2.4	0.79	-1.4	2.4

La tabla entrega 2 conjuntos de valores dependiendo de  $M_s$  la “sensitividad máxima al ruido”.

Podemos usar cualquiera de los 2 conjuntos considerando que:

Con  $M_s = 1.4$  el control será mas lento en responder pero estable.

En tanto que con  $M_s = 2.0$  será rápido en respuesta pero puede ser un poco mas oscilatorio o menos estable.

A la vez se entregan la constantes  $T_i, T_d$  normalizadas con  $L$  y con  $T$ .

Se puede usar cualquiera de las 2 normalizaciones, según cual de los 2 tiempos  $L$  o  $T$  tenemos mejor determinado.

### Ejemplo

Con el mismo ejemplo de la sección 3.0, con los valores

$$K_p = 350$$

$$L = 30 \text{ segundos}$$

$$m = 0.778$$

$$T = 450 \text{ segundos}$$

Calculamos

$$a = m \cdot L = 0.778 \cdot 30 = 23.34$$

$$\tau = \frac{L}{L+T} = 30/(30+450) = 0.0625$$

Para el caso de un control PID con

$$M_s = 1.4$$

$$[SP] = 150 \text{ grados}$$

Usando la tabla correspondiente al PID, y la normalización sobre  $L$

Con  $\tau = 0.0625$  y en cada caso usando los correspondientes valores de  $a_0, a_1$  y  $a_2$

	$M_s = 1.4$		
	$a_0$	$a_1$	$a_2$
$aK$	3.8	-8.4	7.3
$T_i / L$	5.2	-2.5	-1.4
$T_d / L$	0.89	-0.37	-4.1

$$aK = f(\tau) = a_0 \exp(a_1 \cdot \tau + a_2 \cdot \tau^2) = 2.312934$$

$$T_i / L = f(\tau) = a_0 \exp(a_1 \cdot \tau + a_2 \cdot \tau^2) = 4.423538$$

$$T_d / L = f(\tau) = a_0 \exp(a_1 \cdot \tau + a_2 \cdot \tau^2) = 0.8558378$$



Ahora

$$K = 2.312934 / a = 2.312934 / 23.34 = 0.09909$$

$$T_i = 4.423538 * L = 132.7 \text{ seg.}$$

$$T_d = 0.8558378 * L = 25.67 \text{ seg.}$$

Si ahora en particular estamos usando un controlador Arian, con set point =150 grados, las constantes a ser programadas serian:

$$[SP] = 150 \text{ grados}$$

$$[P] = \frac{100\%}{[SP] \cdot K} = 100\% / (150 * 0.09909) = 6.72\% \sim 10\%$$

$$[I] = \frac{10^4}{T_i} = 10000 / 132.7 = 75.35 \text{ seg}^{-1}. \sim 70$$

$$[D] = T_d = 25.6 \text{ seg.} \sim 20$$

Si rehacemos los cálculos con  $M_s = 2.0$ , los resultados finales serian:

$$[SP] = 150 \text{ grados}$$

$$[P] = 3.24\% \sim 3\%$$

$$[I] = 114.8 \text{ seg}^{-1}. \sim 100$$

$$[D] = 22.8 \text{ seg.} \sim 20$$

### 3.2 Método de respuesta en frecuencia (lazo cerrado)

Muchas veces de este método resultan mejores estimaciones que del anterior, principalmente porque se realiza alrededor del punto de operación "set point" del sistema.

Se deben determinar las 2 constantes propias del sistema:

$K_U$       **ganancia última**

$T_U$       **periodo último**

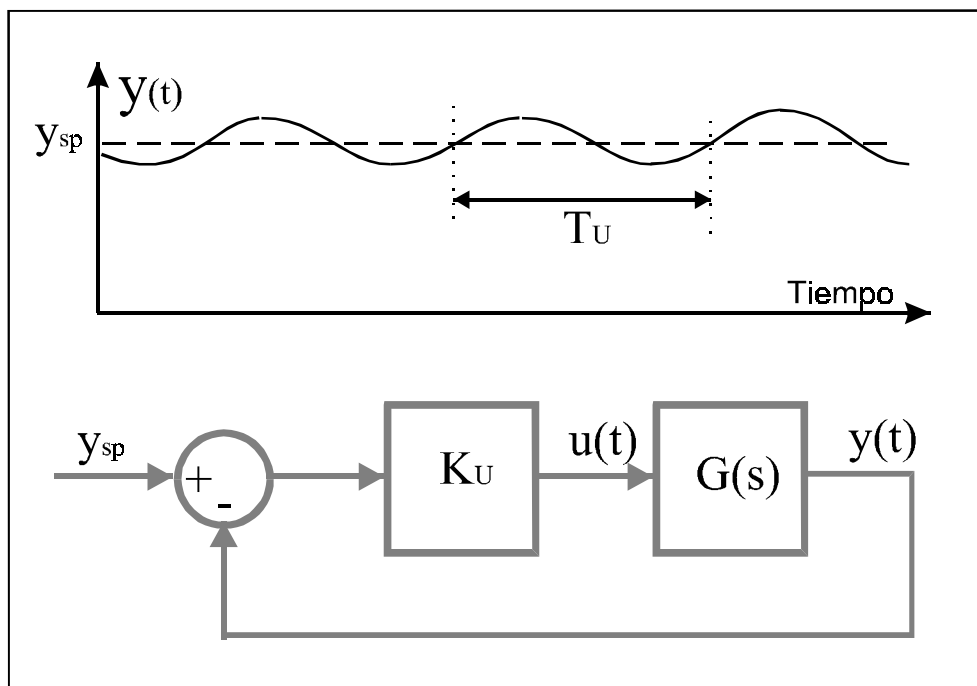
El experimento se realiza así:

- Conecte un controlador PID al sistema con las funciones integral y derivativa eliminadas de modo que solo sea un control proporcional.

- Comience con una ganancia  $K$  lo suficientemente baja (banda proporcional [P] alta) como para que el sistema no oscile.

- Aumente lentamente la ganancia del control ( disminuya [P] ) hasta que empiece el comportamiento oscilatorio.

La ganancia donde esto ocurre es  $K_U$  y el periodo es  $T_U$  .



#### Ejemplo

Por ejemplo ahora se hace este experimento sobre el mismo sistema que hemos estado usando en la sección 3.1

Ponemos primero el set point de nuestro control en 150 grados y eliminamos la acción integral y la derivativa.

Puesto que en la gran mayoría de los controladores la ganancia proporcional se introduce por medio de la “banda proporcional” [P]

$$K = \frac{1}{[y_{sp}] \cdot \frac{[P]}{100\%}}$$

Entonces empezaremos poniendo un valor muy grande [P] =100% para luego ir disminuyéndolo, es decir aumentando la ganancia K.

Suponiendo que al hacer el experimento encontramos que el sistema empieza a oscilar cuando [P] = 10% y el periodo de oscilación es 130 segundos, luego tenemos:

$$K_U = \frac{1}{[y_{sp}] \cdot \frac{[P]}{100\%}} = \frac{1}{[150] \cdot \frac{[10\%]}{100\%}} = 0.0666$$

$$T_U = 130 \text{ segundos}$$

### 3.2.1 Fórmulas de Ziegler-Nichols para “respuesta en frecuencia”

Determinados los 2 valores  $K_U$  y  $T_U$  se pueden usar las formulas de Ziegler-Nichols .

Ziegler-Nichols Método de respuesta en frecuencia			
Control	$K$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5 K_U$		
PI	$0.4 K_U$	$0.8 T_U$	
PID	$0.6 K_U$	$0.5 T_U$	$0.125 T_U$

#### Ejemplo

Para un control PID con los valores de la sección 3.2

$$K_U = 0.06666$$

$$T_U = 130 \text{ segundos}$$

Calculamos

$$K = 0.6 K_U = 0.04$$

$$T_i = 0.5 T_U = 0.5 * 130 = 65 \text{ seg.}$$

$$T_d = 0.125 T_U = 0.125 * 130 = 16.25 \text{ seg.}$$

Si en particular estamos usando un controlador Arian, las constantes a ser programadas serian:

$$[SP] = 150 \text{ grados}$$

$$[P] = \frac{100\%}{[SP] \cdot K} = 100\% / (150 * 0.04) = 16.66\% \sim 15\%$$

$$[I] = \frac{10^4}{T_i} = 10000 / 65 = 154 \text{ seg}^{-1} \sim 150$$

$$[D] = T_d = 16 \text{ seg} \sim 20$$

### 3.2.2 Fórmulas de Astron y Hagglund para “respuesta en frecuencia”

Astron y Hagglund siguiendo la misma línea desarrollaron para este experimento un conjunto de valores recomendados. La ventaja es que son efectivos para un rango más amplio de sistemas pero se requiere conocer  $K_p$  además de  $K_U$  y  $T_U$ .

Por lo tanto habría que realizar también el experimento de respuesta al escalón solo para medir  $K_p$  pero no hay que hacer un grafico o ploteo para encontrar la tangente de pendiente máxima. Esto es mucho mas sencillo pues solo con las lecturas del display del instrumento se obtienen los datos para aplicar la formula :

$$K_p = \frac{y_1 - y_0}{u_1 - u_0}$$

Teniendo determinados  $K_p$ ,  $K_U$  y  $T_U$  se calcula:

$$k = \frac{1}{K_p \cdot K_U}$$

Con este número y la siguiente tabla se evalúa la fórmula :

$$f(k) = a_0 \exp(a_1 \cdot k + a_2 \cdot k^2)$$

La que nos entrega los valores normalizados  $K / K_U$ ,  $T_i / T_U$  y  $T_d / T_U$   
De los que finalmente obtenemos  $K$ ,  $T_i$ ,  $T_d$

Astron-Hagglund Método de respuesta en frecuencia Control PID						
	$M_s = 1.4$			$M_s = 2.0$		
	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_0$	$a_1$	$a_2$
$K / K_U$	0.33	-0.31	-1.0	0.72	-1.6	1.2
$T_i / T_U$	0.76	-1.6	-0.36	0.59	-1.3	0.38
$T_d / T_U$	0.17	-0.46	-2.1	0.15	-1.4	0.56

Astron-Hagglund Método de respuesta en frecuencia Control PI						
	$M_s = 1.4$			$M_s = 2.0$		
	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_0$	$a_1$	$a_2$
$K / K_U$	0.053	2.9	-2.6	0.13	1.9	-1.3
$T_i / T_U$	0.9	-4.4	2.7	0.9	-4.4	2.7

## Ejemplo

Siguiendo con el mismo ejemplo de la sección 3.0 y 3.2, tenemos ahora:

$$K_U = 0.06666$$

$$T_U = 130 \text{ segundos}$$

Además como hemos hecho el experimento del escalón sabemos que

$$K_p = 350$$

Calculamos

$$k = \frac{1}{K_p \cdot K_U} = 1/(0.06666 \cdot 350) = 0.0428571$$

Para el caso de un control PID con

$$M_s = 1.4$$

$$[SP] = 150 \text{ grados}$$

Usando la tabla correspondiente al PID, con  $k = 0.0428571$  y en cada caso usando los correspondientes valores de  $a_0, a_1$  y  $a_2$

	$M_s = 1.4$		
	$a_0$	$a_1$	$a_2$
$K / K_U$	0.33	-0.31	-1.0
$T_i / T_U$	0.76	-1.6	-0.36
$T_d / T_U$	0.17	-0.46	-2.1

$$K / K_U = f(k) = a_0 \exp(a_1 \cdot k + a_2 \cdot k^2) = 0.325047$$

$$T_i / T_U = f(k) = a_0 \exp(a_1 \cdot k + a_2 \cdot k^2) = 0.709163$$

$$T_d / T_U = f(k) = a_0 \exp(a_1 \cdot k + a_2 \cdot k^2) = 0.166039$$

Ahora

$$K = 0.325047 \quad K_U = 0.021669$$

$$T_i = 0.709163 \quad T_U = 92.19 \text{ seg.}$$

$$T_d = 0.166039 \quad T_U = 21.58 \text{ seg.}$$

En particular para un controlador Arian, con set point =150 grados, las constantes a ser programadas serian:

$$[SP] = 150 \text{ grados}$$

$$[P] = \frac{100\%}{[SP] \cdot K} = 100\% / (150 \cdot 0.021669) = 30.7\% \sim 30\%$$

$$[I] = \frac{10^4}{T_i} = 10000 / 92.19 = 108.47 \text{ seg}^{-1} \sim 100$$

$$[D] = T_d = 21.58 \text{ seg.} \sim 20$$

## NOTAS FINALES

Las formulas de Astron y Hagglund son de uso mas general que las de ZN , de hecho estas ultimas se aproximan entre ellas para el caso particular de  $k$  pequeño, algo así como  $0 \leq k \leq 0.1$

Esta condición equivale a pedir  $T \geq 6L$  aproximadamente.

Las formulas de Astron y Hagglund resultaran mas útiles, cuando se tiene un tiempo muerto  $L$  relativamente grande comparado con  $T$

No desarrollaremos aquí por falta de tiempo la relación matemática entre  $K_U$  ,  $T_U$  y  $K_p, L, T$  entre ambos tipos de experimentos. Pero basta saber que si existe y se obtiene a partir de la condición de oscilación marginal (justo donde empieza a oscilar):

$$-1 = K_U G(i\omega_U) = \frac{K_U K_p e^{-Li\omega_U}}{1 - Ti\omega_U}$$

$$\omega_U = 2\pi / T_U$$

## Referencias:

Ziegler J.G. and N.B. Nichols (1942). Optimum settings for automatic controllers. Trans. ASME, 64, Pag. 759-768

K.J. Astrom et al., Automatica, Vol 28, No 1, pagina 4, 1992.

PID Controllers by Karl J. Astrom and Tore Hagglund, Instrument Society of America 1995, ISBN 1-55617-516-7.

## Notas técnicas:

Disponibles en <http://www.arian.cl/espanol/support.htm>

Cuando y en que aplicaciones usar termocuplas J, K ó PT100.

Que són y como funcionan las termocuplas.

Tablas de termocuplas J, K, T, R, S, B y PT100.

PT100, su operación y cuidados en su instalación.

El control PID, que es y como funciona.

Como sintonizar un control PID, teoría y práctica.

Guia rápida para sintonización de lazos PID.